

ベクトル方程式の解き方

例題

$\triangle OAB$ に対し、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s, t が次の条件を満たしながら動くとき、

点 P の存在範囲を図示せよ。

(1) $1 \leq 3s + 2t \leq 6, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$

(2) (1)において、 $O(0,0), A(2,0), B(1,2)$ のとき、点 P の存在範囲を図示せよ。

解答

(1)

解法 1

解法のヒント

$p+q=1, p \geq 0, q \geq 0$ のとき $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ で表される点 C は線分 AB 上を動く。

(条件が $p+q=1$ だけなら、点 C は直線 AB 上を動く)

補足：点 C が線分 AB 上を動くことの証明

$$\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} = (1-q)\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + q(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{AB}$$

これと $0 \leq q \leq 1$ より、点 C は線分 AB 上を動く。

解

$3s + 2t = k, 1 \leq k \leq 6$ とおくと、

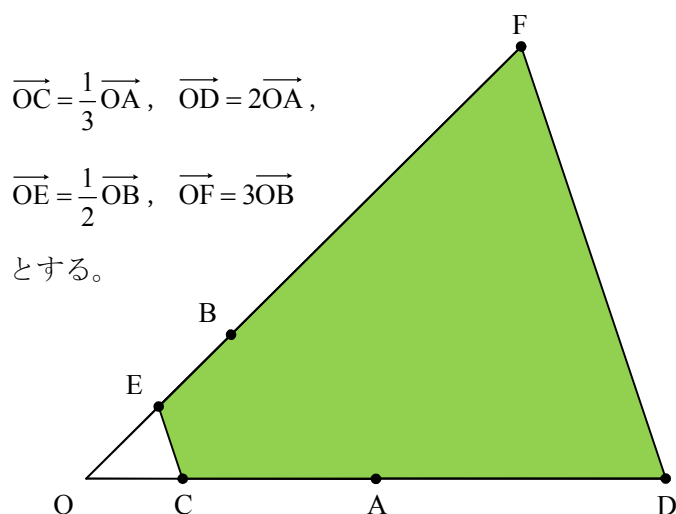
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3s}{k} \left(\frac{k}{3} \overrightarrow{OA} \right) + \frac{2t}{k} \left(\frac{k}{2} \overrightarrow{OB} \right) \end{aligned}$$

ここで $\overrightarrow{OA'} = \frac{k}{3} \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{k}{2} \overrightarrow{OB}$ とすると、

$\frac{3s}{k} + \frac{2t}{k} = 1, \frac{3s}{k} \geq 0, \frac{2t}{k} \geq 0$, より、点 P は A'B' 上を動く。

これと $1 \leq k \leq 6$ より、 $\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}| \leq |\overrightarrow{OA'}| \leq 2|\overrightarrow{OA}|$, $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}| \leq |\overrightarrow{OB'}| \leq 3|\overrightarrow{OB}|$ より、

点 P の存在範囲は下図緑色部分である。



解法 2 : 斜交座標を使って解く

$\overrightarrow{OA}$ の向きを x 軸, $\overrightarrow{OB}$ の向きを y 軸とする xy 斜交座標平面上の原点を O , $(a, 0)$ を A ,

$(0, b)$ を B , ただし, $a > 0, b > 0$ とする。また, 点 P を (x, y) とする。

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \text{ より, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as \\ bt \end{pmatrix} \quad \therefore s = \frac{x}{a}, t = \frac{y}{b}$$

これと $1 \leq 3s + 2t \leq 6$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, $a > 0, b > 0$ より,

点 P の範囲は $1 \leq \frac{3}{a}x + \frac{2}{b}y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を満たす下図緑色部分 (境界線を含む)

また, $a < 0, b > 0$ のとき, $a > 0, b < 0$ のとき, $a < 0, b < 0$ のときは

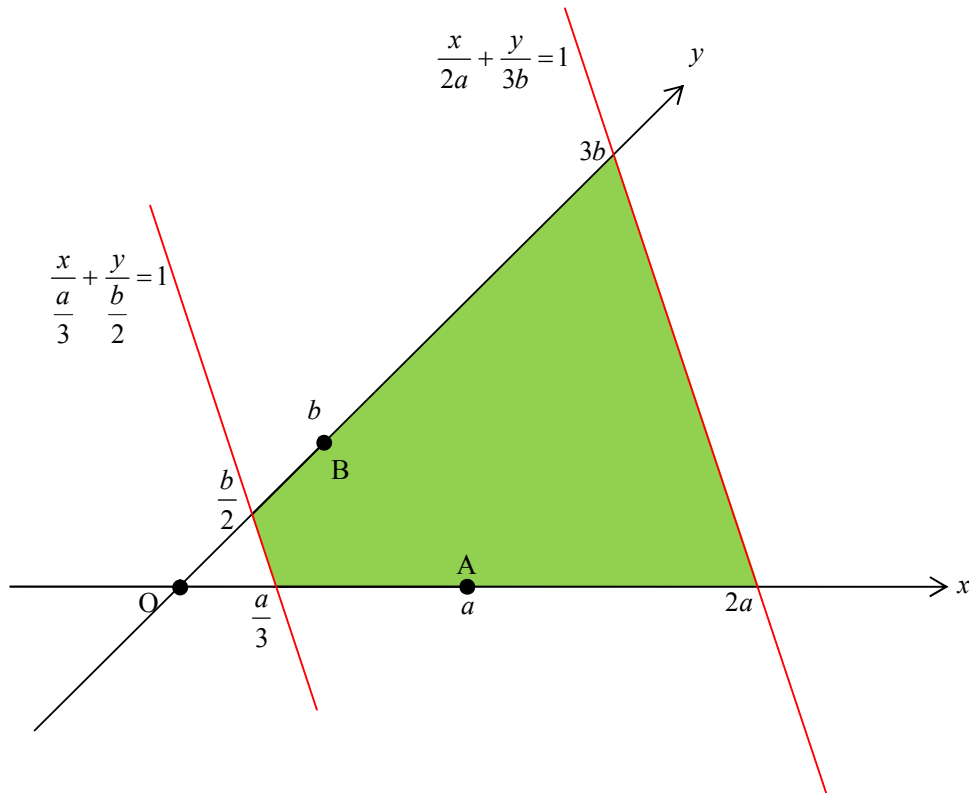
下図をそれぞれ y 軸, x 軸, 原点に関して対称移動した図になるが,

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$ の関係は下図と同じである。

補足

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ に対する P の問題だから, a, b は任意である。

したがって, 図示のみならば点 A を $(1, 0)$, 点 B を $(0, 1)$ とすると楽である。



補足

$1 \leq \frac{3}{a}x + \frac{2}{b}y \leq 6$ の図示の仕方

【1】 $\frac{3}{a}x + \frac{2}{b}y \geq 1$ の領域

$\frac{3}{a}x + \frac{2}{b}y \geq 1$ を変形すると $\frac{x}{\frac{a}{3}} + \frac{y}{\frac{b}{2}} \geq 1$ となるから、

x 切片を $\frac{a}{3}$, y 切片を $\frac{b}{2}$ とする直線を境界とする原点を含まない領域である。

ただし、境界を含む。

【2】 $\frac{3}{a}x + \frac{2}{b}y \leq 6$ の領域

$\frac{3}{a}x + \frac{2}{b}y \leq 6$ を変形すると $\frac{x}{2a} + \frac{y}{3b} \leq 1$ となるから、

x 切片を $2a$, y 切片を $3b$ とする直線を境界とする原点を含む領域である。

ただし、境界を含む。

参考

切片と直線の方程式・平面の方程式

<http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukonetapdf/intercept-equation-line-plane.pdf>

(2)

解法 1

(1)の解法 1 を利用する解

$$(1)より, \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} = (4,0), \quad \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OF} = 3\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

よって, $C\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $D(4,0)$, $E\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $F(3,6)$ を頂点とする四角形の周を含む内部の点

(1)の解法 2 を応用した解法

点 P の座標を (x, y) とすると,

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \text{ より, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s+t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } s = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}, \quad t = \frac{y}{2}$$

$$t \geq 0 \text{ より } y \geq 0$$

$$s \geq 0 \text{ より } \frac{x}{2} - \frac{y}{4} \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq y \leq 2x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$1 \leq 3s + 2t \leq 6 \text{ より, } 1 \leq 3 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) + 2 \cdot \frac{y}{2} \leq 6$$

$$\therefore -6x + 4 \leq y \leq -6x + 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ゆえに, 点 P の存在範囲は, ①と②を同時に満たす領域である。

